Woche 1

Pünktchenlose Notation

Folge (von Vektoren):

$$v_1, v_2, \dots, v_n = (v_1, v_2, \dots, v_n) = (v_j)_{j=1}^{n}$$

${}_{j=1}^{n}$: alle j mit $1 \leq j \leq n$, in aufsteigender Reihenfolge.

$n=2$: (v_1, v_2)

$n=1$: (v_1)

$n=0$: $(\,)$

Linearkombinationen:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$$

$n=2$: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

$n=1$: $\lambda_1 v_1$

$n=0$: 0 (Nullvektor)

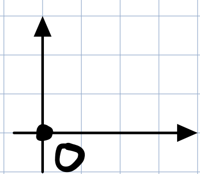
$\uparrow$

ohne Bewegung

bleiben wir am Ursprung!

$0 \in \mathbb{R}^2$: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$0 \in \mathbb{R}^3$: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$



Menge von Vektoren:

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{v_j : j \in \underbrace{[n]}_{\{1,2,\dots,n\}}\}$$

Vektoren:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = [v_i]_{i=1}^m \quad ; \quad [0]_{i=1}^6 = 0 \in \mathbb{R}^6$$

$$[i^2]_{i=1}^5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$[v_i]_{i=1}^0 = () \in \mathbb{R}^0 .$$

Skalarprodukte, Längen und Winkel (1.2)

Skalarprodukt: multipliziere zwei Vektoren!

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11.$$

Def. 1.9. Seien

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}, \; w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m .$$

Das Skalarprodukt von v und w ist die Zahl

$$v \cdot w := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_m w_m$$
$$= \sum_{i=1}^m v_i w_i$$

vs. λv

Beobachtung 1.10 Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

(i) $v \cdot w = w \cdot v$

(ii) $(\lambda v)\cdot w = \lambda\,(v\cdot w) = v\cdot(\lambda w)$

(iii) $u\cdot(v+w) = u\cdot v + u\cdot w$

$(u+v)\cdot w = u\cdot w + v\cdot w$

(iv) $v\cdot v \geq 0$, mit Gleichheit genau wenn $v=0$

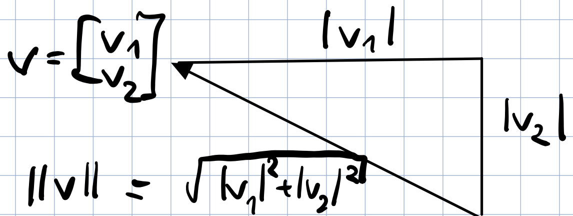
Euklidische Norm: definiert Länge eines Vektors.

Def. 1.11: Sei $v\in\mathbb{R}^m$. Die Euklidische Norm von v ist $\|v\| := \sqrt{v\cdot v}$

$$\left\|\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} v_i^2} \qquad \left\|\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

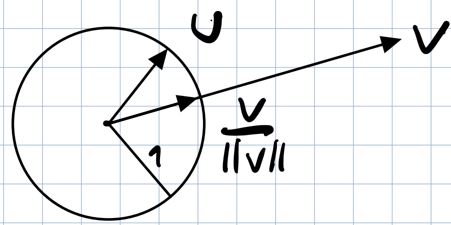
$\|v\|$ vs. $|v|$? v vs. $\vec{v}$?

In $\mathbb{R}^2$: Pfeillänge (Pythagoras!)



$\|v\| = \sqrt{|v_1|^2+|v_2|^2}$

Einheitsvektor: $\|u\| = 1$



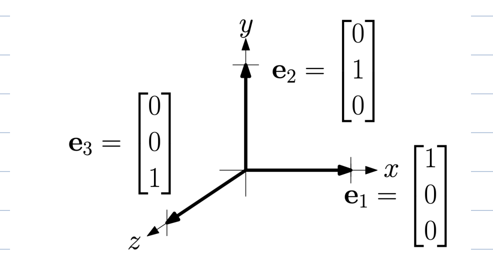
Für $v\neq 0$ ist $\frac{v}{\|v\|}$ ein Einheitsvektor

$\frac{1}{\|v\|}\cdot v$

Standard-Einheitsvektoren

$\mathbb{R}^3$: $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^m$: $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ← Koordinate i



Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 1.12: Seien $v, w \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

$$|v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn ein Vektor ein skalares Vielfaches des anderen ist.

Winkel zwischen zwei Vektoren

Def. 1.14: Seien $v, w \in \mathbb{R}^m$, beide ungleich 0.

Der Winkel zwischen v und w ist das eindeutige α zwischen 0 und π (180 Grad), so dass

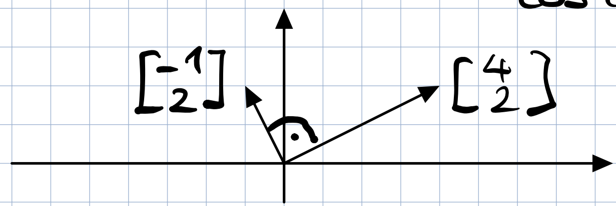
$$\cos(\alpha) = \underbrace{\frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}}_{\substack{\text{zwischen } -1 \text{ und } 1 \\ \text{wegen Cauchy-Schwarz}}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}\right)$$

In $\mathbb{R}^2$: der übliche Winkel zwischen den Pfeilen

Senkrechte Vektoren

Def. 1.15: $v, w \in \mathbb{R}^m$ stehen senkrecht aufeinander, wenn $\underbrace{v \cdot w = 0}_{\cos(\alpha) = 0,\ 90 \text{ Grad}}$.

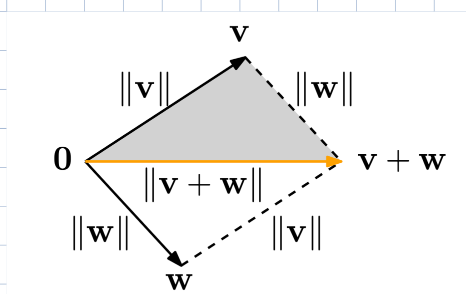


$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0$$

Dreiecksungleichung (Beweis mit Cauchy-Schwarz)

Lemma 1.16 Seien $v, w \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$



R^2: von 0 direkt zu $v+w$ ist kürzer als über v oder über w.

Clicker: $v \cdot e_1 + v \cdot e_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

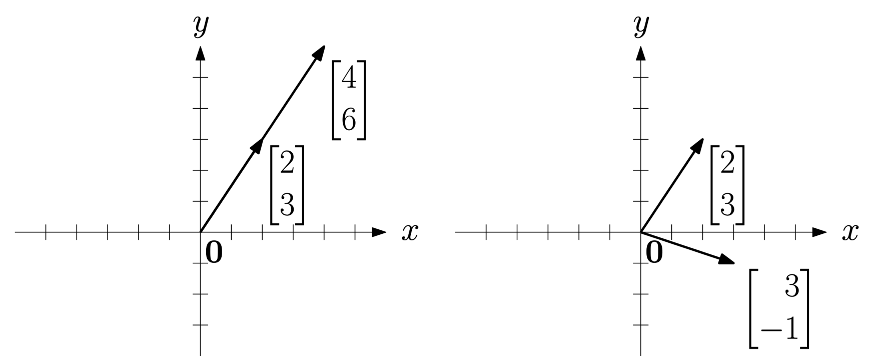
Cauchy-Schwarz: $v_1 + v_2 \leq \|v\| \cdot \underbrace{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}_{\sqrt{2}}$

Lineare Unabhängigkeit (1.3)

Def. 1.18: Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ sind linear abhängig, wenn mindestens einer von ihnen eine Linearkombination der anderen ist. D.h. es gibt ein $k \in [n]$ und Skalare λ_j, so dass

$$v_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \lambda_j v_j$$

Andernfalls sind $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig.



linear abhängig   linear unabhängig

kollinear $\longrightarrow \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

Drei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind immer linear abhängig. (Erklärung folgt!)

Konkretes Beispiel für Clicker: $v = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$:

$$\underbrace{v \cdot e_1}_{2} + \underbrace{v \cdot e_2}_{3} = \underset{\sqrt{25}}{\overset{\shortparallel}{5}} \qquad \|v\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\sqrt{25} < \sqrt{2}\,\|v\| = \sqrt{26}$$

Entweder sind zwei schon kollinear und damit linear abhängig. Andernfalls ist jeder der drei Vektoren Linearkombination der anderen beiden (Challenge 1.6).

	linear unabhängig	linear abhängig
	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$	
		$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$
		$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$
Folge mit einem Vektor →	$v \neq 0$	
Folge mit einem Vektor →		$v = 0$
		$\dots, 0, \dots$
		$\dots, v, \dots, v, \dots$
leere Folge →	$()$	

$$\underset{v_1}{(0)} \qquad v_1 = \overset{\wedge}{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}} \lambda_j v_j = \underset{\text{Nullvektor}}{0} \quad \checkmark$$

Alternative Definitionen

Lemma 1.19: Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent (alle wahr oder alle falsch):

(i) Mindestens ein Vektor ist eine Linearkombination der anderen (lin. abh. nach Def. 1.18)

(ii) Es gibt Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ <u>ausser</u> $0, 0, \ldots, 0$, so dass $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = 0$

(0 ist eine nichttriviale Linearkombination der Vektoren)

(iii) Mindestens ein Vektor ist eine Linearkombination der vorherigen Vektoren.

<u>Beweis:</u>

Idee: (i) impliziert (ii): <u>wenn</u> (i) gilt, <u>dann</u> auch (ii);

$$\left.\begin{array}{l} (i) \Rightarrow (ii) \\ (ii) \Rightarrow (iii) \\ (iii) \Rightarrow (i) \end{array}\right\} \quad (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$$

$\Leftrightarrow$ gdw (genau dann wenn)

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $v_K = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \lambda_j v_j$ und definiere $\lambda_K = -1$. Wir erhalten (ii): $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = 0$

$$0 = \sum_{j \neq n} \lambda_j v_j - v_K = \sum_{j=1} \lambda_j v_j + \lambda_K v_K$$

Nichttrivial, weil $\lambda_K \neq 0$.

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \lambda_j v_j$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = 0$, nicht alle $\lambda_j = 0$.

Sei k der grösste Index mit $\lambda_k \neq 0$.

$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j = 0$; Auflösen nach v_k:

$$v_k = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{-\lambda_j}{\lambda_k} \right) v_j \Rightarrow \text{(iii)}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) eine Linearkombination der vorherigen ist auch eine Linearkombination der anderen (setze Skalare der nachfolgenden Vektoren auf 0).

Beispiel

$$3v_1 + 5v_2 + 6v_3 = 0 \qquad , k=2$$

$$5v_2 = -3v_1 - 6v_3 \quad | : 5$$

$$v_2 = -\frac{3}{5}v_1 - \frac{6}{5}v_3$$

Korollar 1.20: Seien $v_1, v_2, \ldots v_n \in \mathbb{R}^m$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Keiner der Vektoren ist eine Linearkombination der anderen (lin. unabh. nach Def. 1.18)

(ii) Es gibt keine Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ausser $0, 0, \ldots, 0$ so dass $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = 0$

(0 kann nur als triviale Linearkombination

der Vektoren dargestellt werden.)

(iii) Keiner der Vektoren ist eine Linear-kombination der vorherigen.

Eindeutigkeit der Linearkombination

Lemma 1.21: Seien $v_1, v_2, \ldots v_n \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig und $w = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j$.

Dann gilt $\lambda_j = \mu_j$ für alle j.

Beweis: Subtraktion: $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \mu_j) v_j}_{w-w} = 0$

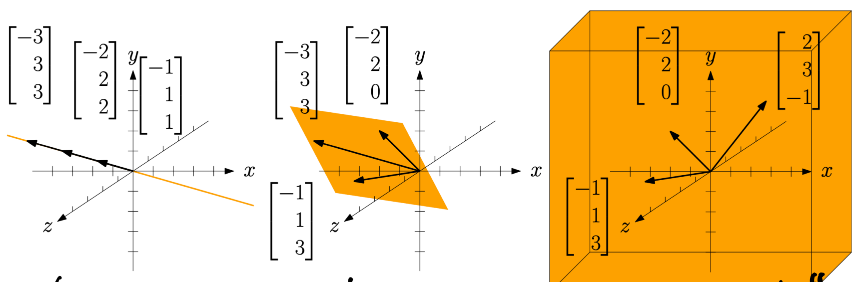
Da 0 nur als triviale Linearkombination darstellbar ist, gilt $\lambda_j - \mu_j = 0$ für alle j.

Spann von Vektoren: Menge aller Linearkombinationen

Def. 1.22: Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$. Ihr Spann ist

$$\operatorname{Span}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j : \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ für alle } j \right\}$$

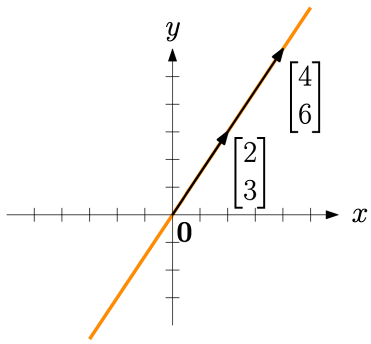
Spann von drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

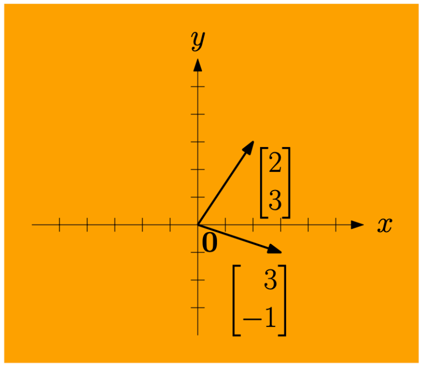


kollinear koplanar linear unabhängig

Es gilt immer: $\mathbf{0} \in \operatorname{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Fakt 1.5: $\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$.





Lemma 1.23: Seien $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ und sei $v \in \mathbb{R}^m$ eine Linearkombination von $v_1, v_2, \dots, v_n$.
Dann gilt:

$$\operatorname{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \operatorname{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n, v).$$